

Enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale

Thèmes d'étude

Modèles définis par une fonction d'une variable
Modèles d'évolution
Approche historique de la fonction logarithme
Calculs d'aires
Répartition des richesses, inégalités
Inférence bayésienne
Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage
Temps d'attente
Corrélation et causalité

Contenus

Analyse
Probabilités et statistique
Algorithmique et programmation

L'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires est destiné aux élèves qui, ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en classe de première et ne souhaitant pas poursuivre cet enseignement en classe terminale, ont cependant besoin de compléter leurs connaissances et compétences mathématiques par un enseignement adapté à leur poursuite d'études dans l'enseignement supérieur, en particulier en médecine, économie ou sciences sociales.

Le programme de mathématiques complémentaires s'appuie sur le programme de spécialité de mathématiques de la classe de première qu'il réinvestit et enrichit de nouvelles connaissances et compétences mathématiques, elles-mêmes reliées à des thèmes d'étude où les notions sont mises en situation dans divers champs disciplinaires.

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. Ceux-ci facilitent en effet le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en oeuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies.

Les thèmes d'étude du programme proposent une approche nouvelle, avec des problèmes issus des autres disciplines ou internes aux mathématiques. Les compétences de modélisation et de communication sont particulièrement mises en valeur, mais toutes les compétences mathématiques sont mobilisées, notamment le raisonnement et la capacité à construire une démonstration.

Cette diversité se retrouve dans les thèmes d'étude proposés aux élèves et dans la façon de les aborder. Les travaux proposés aux élèves s'adaptent à leur choix d'enseignements de spécialité et à leur projet d'études supérieures. Ils peuvent prendre la forme de travaux écrits ou d'exposés, individuels ou en groupe.

Organisation du programme

Le programme s'organise en deux grands volets :

- le premier volet est constitué de neuf thèmes d'étude, où les concepts mathématiques du programme sont mis en situation dans divers champs disciplinaires ;
- le second volet précise l'ensemble des contenus et capacités attendues.

L'objectif est de traiter l'ensemble des contenus et capacités attendues au travers des thèmes d'étude.

Thèmes d'étude

Modèles définis par une fonction d'une variable

Descriptif

Les fonctions d'une variable réelle interviennent dans des problèmes variés, internes aux mathématiques ou issus des sciences expérimentales, économiques et sociales.

Ce thème très large peut être croisé avec d'autres thèmes (fonction logarithme, répartition de richesse, calcul d'aire, modèles d'évolution). Il peut se répartir sur l'année en fonction des besoins ou de l'avancée des contenus.

Problèmes possibles

- Modèles issus de contextes géométriques (expression de distance, d'aires, de volumes en fonction d'un paramètre), physiques, biologiques, économiques (fonctions de coût, coût marginal, coût moyen).
- Études de variations, résolutions d'équation, optimisation dans des configurations géométriques, physiques, économiques, etc.

Modèles d'évolution

Descriptif

Il s'agit ici de modéliser des phénomènes qui dépendent du temps, à l'aide de suites ou de fonctions d'une variable réelle.

La mise en regard des modèles discrets et des modèles continus est un objectif important.

Ce thème très large peut être étudié au fil de l'année en fonction des besoins ou de l'avancée des contenus.

Problèmes possibles

- Évolution d'un capital, amortissement d'une dette.
- Loi de décroissance radioactive : modèle discret, modèle continu.
- Décharge, charge d'un condensateur, à partir de l'équation différentielle.
- Loi de refroidissement de Newton (modèle discret).
- Chute d'un corps dans un fluide visqueux.
- Dynamique des populations : modèle de Malthus (géométrique), modèle de Verhulst (logistique) discret $N_{t+1} = N_t + r N_t(k - N_t)$, ou continu : $y' = ay(b - y)$.
- Modèle proie prédateur discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes.

Approche historique de la fonction logarithme

Descriptif

Il s'agit de montrer qu'un objet mathématique, ici la fonction logarithme népérien, peut être étudié selon divers points de vue

Problèmes possibles

- Le développement des besoins pratiques de calcul, notamment pour l'astronomie ou la navigation conduit à la recherche de méthodes facilitant multiplication, division, extraction de racine. Influence des tables trigonométriques.
- Lien entre suites arithmétiques et géométriques (depuis Archimède). Construction de tables d'intérêts.
- Les travaux de Neper. Le passage du discret au continu.
- Vision fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$ plus tardive.
- Quadrature de l'hyperbole, problème des sous-tangentes constantes.

Calculs d'aires

Descriptif

Des calculs d'aires menés selon différentes méthodes permettent d'aboutir à l'introduction de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ de \mathbb{R} en montrant alors la puissance de calcul qu'apporte dans ce domaine la détermination des primitives.

Problèmes possibles

- Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède.
- Quadrature de l'hyperbole par une ou deux méthodes (Brouncker, Grégoire de Saint-Vincent).
- Approximation de l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle sur $[0,1]$ par la méthode des rectangles.
- Estimation de l'aire sous une courbe par la méthode de Monte-Carlo.
- Approximation de π et aire d'un disque.

Répartition des richesses, inégalités

Descriptif

L'étude de la répartition de richesses dans la population d'un pays, des salaires dans une entreprise, etc., et la comparaison des différentes répartitions sont des occasions de réinvestir des connaissances antérieures de statistique descriptive et de construire de nouveaux outils d'analyse faisant intervenir les fonctions d'une variable (notamment des fonctions de répartition) et le calcul intégral.

Problèmes possibles

- Courbe de Lorenz : sur des données réelles, présentation, définition, lecture, construction d'une ligne polygonale à partir des quantiles, interprétation. Modélisation par la courbe représentative d'une fonction continue, croissante, convexe de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et ayant 0 et 1 comme points fixes. Position par rapport à la première bissectrice.
- Indice de Gini : définition, calcul, interprétation comme mesure du degré d'inégalité d'une répartition. Comparaison de plusieurs répartitions. Évolution de l'indice sur une période.

Inférence bayésienne

Descriptif

Le raisonnement bayésien est à la base de nombreux algorithmes de décision et se retrouve dans de nombreux domaines pratiques : sport, médecine, justice, etc. où l'on doit raisonner à partir de probabilités et d'informations incomplètes. Il s'agit ici de décrire et mettre en oeuvre les principes du calcul utilisant des probabilités conditionnelles et notamment la formule de Bayes pour l'inversion des conditionnements.

Problèmes possibles

- Tests binaires pour le diagnostic médical. Notion de vrais/faux positifs et négatifs, sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positive (diagnostique) et négative, lien avec les probabilités conditionnelles. Tests de dépistage de sensibilité et de spécificité données : étude des valeurs prédictives en fonction de la proportion de malades et interprétation.
- Exemples de problèmes du type : « De quelle urne vient la boule ? ».

Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage

Descriptif

Ce thème vise à illustrer le modèle probabiliste de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes et de l'échantillonnage ainsi que ses applications à l'inférence statistique, où il s'agit, à partir de l'observation d'un échantillon, d'induire des propriétés de la population dont il est issu. Le schéma de Bernoulli et la loi binomiale forment un cas fondamental, où il s'agit de considérer d'une part des probabilités ou proportions théoriques, et d'autre part des fréquences observées.

Problèmes possibles

- Tirages aléatoires avec remise d'une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs différentes. Simulations. Calculs de probabilité.
- Test d'une pièce, par construction d'un intervalle I centré en $n/2$ tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$
- Surréservation. Construction d'un intervalle I de la forme $[0, k]$ tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
- Sondages par échantillonnage aléatoire simple. Fourchette de sondage. Réflexion sur la réalisation effective d'un sondage et les biais possibles (représentativité, sincérité des réponses, etc.).
- Démarche des tests d'hypothèse et de l'estimation.

Temps d'attente

Descriptif

Certains phénomènes physiques (temps de désintégration d'un atome radioactif) ou biologiques (durée de vie de certains organismes) possèdent la propriété d'absence de mémoire. Leur modélisation mathématique repose sur l'utilisation des lois géométriques et exponentielles selon que le temps est considéré comme discret ou continu.

Problèmes possibles

- Durée de vie d'un atome radioactif. Discrétisation d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.
- Exemples de modélisation par une variable aléatoire suivant une loi géométrique ou exponentielle : durée entre deux appels téléphoniques, durée de vie d'un composant électronique, période de retour de crue, etc.
- Utilisation de la loi uniforme. Temps d'attente à un arrêt de bus, paradoxe de l'inspection.

Corrélation et causalité

Descriptif

À travers l'étude de séries statistiques à deux variables, l'objectif de ce thème est d'amener l'élève à évaluer une corrélation entre deux phénomènes, à développer une réflexion critique sur le lien entre deux phénomènes corrélés, et finalement à distinguer corrélation et causalité.

Problèmes possibles

- Établissement de la loi d'Ohm.
- Loi de désintégration radioactive.
- Évolution de la température et des émissions de gaz à effet de serre dans le cadre du réchauffement climatique.
- Loi de Moore.